
FEUILLE 1 : NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 Donner les valeurs de $\sin(\frac{\pi}{6})$, $\cos(\frac{\pi}{6})$, $\sin(\frac{\pi}{4})$, $\cos(\frac{\pi}{4})$, $\sin(\frac{\pi}{3})$ et $\cos(\frac{\pi}{3})$, en se basant sur le dessin des angles sur un cercle unitaire si on ne les connaît pas par coeur.

Exercice 2 Simplifier les nombres complexes et les mettre sous la forme cartésienne $z = x + iy$:

(a) $(1 + 3i)\overline{(7 - i)}$ (b) $\frac{9+2i}{3-2i}$ (c) $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ (d) $e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Exercice 3 Soit $f(z) = \frac{z^2 - 1}{1 - \bar{z}}$ et $g(z) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{z}$. Calculer $f(1 - i)$ et $g(1 + i)$.

Exercice 4 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe

$$z = \frac{1 + im}{2m + i(m^2 - 1)}, m \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5 Soit $a = e^{i\theta} \neq 1$ un nombre complexe unitaire. Trouver les conditions sur $\theta \in \mathbb{R}$ pour que $a \neq 1$. Calculer ensuite la partie réelle et la partie imaginaire de $z = \frac{1+a}{1-a}$.

Exercice 6 Mettre les nombres complexes suivants sous la forme trigonométrique $z = re^{i\varphi}$:

(a) $1 + i$ (b) $\sqrt{3} + i$ (c) $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$

Exercice 7 1. Mettre $z = e^{i\frac{\pi}{6}}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ sous forme cartésienne.

2. Mettre $z = 1 - \sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique.

Exercice 8 Calculer le module et l'argument du nombre complexe $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.

Exercice 9 Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants

(a) $u = 7 + 24i$ (c) $w = 8 - 6i$
(b) $v = 9 + 40i$ (d) $t = -3 + 4i$

Exercice 10 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

(a) $z^2 + 4 = 0$ (d) $z^2 + 3z + 3 = 0$
(b) $z^2 + z + 1 = 0$
(c) $z^2 + 2z + 2 = 0$ (e) $2z^2 + (5 + i)z + 2 + 2i = 0$

Exercice 11 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Montrer que $\frac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$.

Exercice 12 Résoudre de deux façons différentes l'équation

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En déduire les valeurs de $\cos \frac{\pi}{8}$ et de $\sin \frac{\pi}{8}$.

Exercice 13 Pour quelle année n parmi les années 2011, 2012, 2013 et 2014, le nombre $(1+i)^n$ est-il imaginaire pur ?

Exercice 14 Calculer

$$\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} \right)^n$$

en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 Racines de l'unité.

1. Déterminer les racines cubiques de 1.
2. On note $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Exprimer toutes les racines cubiques de 1 en fonction de j .
3. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

Exercice 16 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 + 4 = 0$.

Exercice 17 Résoudre dans \mathbb{C} :

(a) $z^2 - 10z + 21 = 0$

(e) $z^2 + (1 - 3i)z - 8 + i = 0$

(b) $z^2 - 2z + 5 = 0$

(f) $z^n - 1 = 0$

(c) $z^2 - (8 + i)z + 17 + 7i = 0$

(d) $\frac{i}{2}z^2 + (\frac{1}{2} - i)z - 8 - i = 0$

(g) $z^5 - z = 0$